Manfred Borovcnik, Klagenfurt

MATURA-AUFGABEN ZUR WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG UND STATISTIK

Seit der Aufnahme der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik in den Lehrplan war der "Komplex Matura-Aufgaben" aus diesem Fach ein virulentes Problem. Das Teilgebiet der Mathematik hat eben keine Schultradition wie z.B. die Analysis. Überdies gibt es eine Kluft zwischen zu schwierigen und zu leichten Aufgaben, der Lösungsweg ist z.T. nicht kalkülmäßig greifbar und kann daher nur schwer schriftlich festgehalten werden. Ein Wirksamwerden dieses neuen Stoffgebietes wird nicht zuletzt vom Angebot (und der Kenntnis davon) von geeigneten Maturabeispielen abhängen.

Im folgenden sollen Aufgaben aus verschiedenen Teilgebieten sowie aus verschiedenen speziellen Anwendungsgebieten der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik angeboten werden, die Maturareife haben sollten. Wir sind uns natürlich dessen bewußt, daß in vielen Fällen noch daran zu feilen sein wird. Dies soll als Anstoß zu Diskussionen in diese Richtung verstanden sein.

Die Art der Beispiele ist teilweise ungewöhnlich, sie hängt jedoch eng mit unserer Auffassung von Stochastik zusammen. Würfel- und Glücksspielaufgaben haben ihren Platz, um ein Bild stochastischer "Mechanismen" zu gewinnen, um den Ablauf eines Modells zu erfassen, diese Art von Beispielen ist jedoch nicht als das alleinige Ziel eines Stochastik-Unterrichts zu begreifen, vor allem, wenn man diesen immer wieder damit zu legitimieren versucht, daß er zur Emanzipation der jungen Menschen, zu Einsichten in grundlegende Denkweisen und Methoden, die heute in fast allen Wissenschaften, aber auch im öffentlichen Leben (und da meist mit vielen Fehlvorstellungen behaftet), einen wichtigen Platz einnehmen.

Abgesehen davon, daß Glücksspielaufgaben weithin bekannt sind, ist somit klar gelegt, warum solche Beispiele in der folgenden Sammlung nicht enthalten sind. Vielmehr haben wir (teilweise) bestehende Aufgaben so modifiziert, daß

- Schüler einen (umfangreichen) Text erfassen und umsetzenmüssen,
- Schüler selbst die Annahmen treffen müssen, um die Problemsituation in eine Standardsituation überzuführen,
- der Anwendungskontext nicht steril (im Sinne eines Pseudomodells) ist, er soll Problemsituationen erzeugen, die eine inhaltliche

Interpretation der Ergebnisse herausfordern,
- die getroffenen Annahmen diskutiert werden müssen, insbesondere auf ihre Schwachstellen hin.

Wir haben damit das Pferd vom Schwanz her aufgezäumt: Wir sind nicht davon ausgegangen, zuerst die Ziele, die mit einem Stochastik-Unterricht verfolgt werden sollen, zu formulieren, dann den Unterricht zu konzipieren und schließlich Aufgaben zu erstellen, die den Grad der Erreichung der Ziele abprüfen. Wir haben vielmehr (hier) zuerst Aufgaben gestellt, von denen wir meinen, daß der Maturant sie lösen können sollte. Dieses Vorgehen ist pragmatisch, es entspricht jedoch der Schulrealität. Potentielle Maturabeispiele bestimmen die Richtung und Ausrichtung des Unterrichts in einem hohen Ausmaß. So gesehen müssen wir auch deklarieren, daß diese Beispiele nicht immer, nicht in allen Teilen, dem realen Unterricht entsprechen, sie sind in jenen Teilen eben als Absichtserklärung zu verstehen, den Unterricht tendenziell darauf abzustimmen. Wir stehen nicht an festzustellen, daß
- das Erfassen und Umsetzen umfangreicher Texte, das Interpretieren von Ergebnissen in Abstimmung auf eine Problemsituation und getroffene Annahmen eine große Hürde darstellt,
- die Bewertung der Lösung solcher Aufgaben schwierig(er) ist.

Wir sehen jedoch im (teilweise) Erreichen dieser Ziele eine Chance auf Einlösung von Legitimationsversuchen in Richtung Emanzipation der jungen Menschen.

Die Beispiele selbst sind nach Teilgebieten sowie nach spezifischen Anwendungsgebieten geordnet, sie sind mit Hinweisen und Kommentaren versehen, die Voraussetzungen zur Lösung werden schlagwortartig angegeben. Die Quelle des Ausgangsbeispiels wird angegeben, eine kommentierte Bibliographie von Büchern mit vielen (guten) Beispielen ist angeschlossen.

KOMBINATORIK, BAUMDIAGRAMME, UNABHÄNGIGKEIT ETC.

1) In dieser Aufgabe soll ein Problem behandelt werden, das zu den frühesten Aufgabenstellungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung gehört, das problème des partis. 2 Spieler A und B spielen ein Glücksspiel, bei dem es kein Remis gibt. Beide Spieler haben gleiche Chancen. Wer zuerst 5 Partien gewonnen hat, bekommt den Einsatz. Durch "force majeure" muß das Spiel plötzlich abgebrochen werden: A hat 4 Partien gewonnen, B erst 3. Wie ist der Einsatz zu verteilen? Luca Pacioli (1445-1514) schlug vor, den Einsatz proportional zur Anzahl der gewonnenen Partien aufzuteilen, also 4:3. Andere wollten nur die noch zu spielenden

Partien in Betracht ziehen und schlugen eine Aufteilung im Verhältnis 2:1 für A zu B vor. De Méré stellte das Problem Pascal, der seine Lösung am 19.7.1654 Fermat brieflich mitteilte. Er schlug vor, den Einsatz im Verhältnis 3:1 zwischen A und B aufzuteilen. 1655 erfuhr Huygens in Paris von diesem Briefwechsel mit den noch geheimen Lösungsmethoden. (Fermat gelangte nämlich auf einem anderen Wege als Pascal zu demselben Resultat.)

a) Geben Sie Begründungen für die einzelnen Lösungsversuche und allenfalls Beispiele, die zeigen, daß die jeweilige Lösung Schwachstellen hat.

b) Lösen Sie die Aufgabe allgemein nach dem Schema von Pascal: Gewinner soll derjenige sein, der als erster s Partien gewonnen hat. Das Spiel werde abgebrochen beim Stand (s-m):(s-n) für A gegen B. Wie ist der Einsatz aufzuteilen?

c) Wir nehmen die Annahme, daß es sich hiebei um ein Glücksspiel handelt, zurück. Es komme auf die Geschicklichkeit an. Diskutieren Sie die Lösung von Pascal unter diesen geänderten Bedingungen. Wie soll man nun vorgehen?

d) Schätzen Sie die Erfolgswahrscheinlichkeit (mit Zahlen aus a)) für Spieler A. Berechnen Sie seine Gewinnwahrscheinlichkeit! Wie sind die Einsätze zu verteilen? Ist der Schätzwert zuverlässig? Beurteilen Sie dies mittels Konfidenzintervallmethoden.

Text auffassen können, Baudiagramme, a) und b) einfach, d) Konfidenzintervalle, Normalapproximation (einschließlich der hier schlechten Güte der Approximation), Interpretation von Ergebnissen nach gewissen (teilweise zu findenden) Kriterien.

(vgl. Barth e.a.1, S. 42)

2) Bei einem Gesellschaftsspiel (chuck-a-luck) zahlt der Spieler zum Spielbeginn einen Betrag e ein. Er wählt aus den sechs Zahlen 1,2,...,6 und würfelt dann drei Würfel. Zeigen alle drei Würfel die vom Spieler genannte Augenzahl, dann erhält er das Vierfache seines eingezahlten Betrages; zeigen zwei Würfel diese Zahl, dann erhält er das Dreifache von e; zeigt nur ein Würfel die genannte Zahl, dann erhält er das Doppelte des eingezahlten Betrages. Wenn die Zahl nicht erscheint, erhält er nichts. Es sei nun X der Netto-Gewinn des Spielers bei einer einzigen Partie dieses Spieles. Bestimme unter der Annahme, daß die Würfel ideal sind, a) die Wahrscheinlichkeitsfunktion der Zufallsveränderlichen X, b) E(X). Soll der Spieler das Spiel spielen? c) Sechs Spieler spielen das Spiel nach zwei (drei) verschiedenen Strategien:
.) Alle sechs setzen zufällig auf ein und dieselbe Zahl
.) Alle sechs setzen auf verschiedene Zahlen
.) Zwei Gruppen zu drei setzen jeweils auf dieselbe Zahl; die zwei Gruppen sprechen sich ab und setzen nicht auf dieselbe Zahl.
Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz des Nettogewinns der ganzen Spielerrunde. Beurteilen Sie die verschiedenen Strategien nach ihrer Güte.

Text auffassen; Vielfalt der Lösungsmethoden (mit Binomialwahrscheinlichkeiten bzw. Kombinatorik oder Baumdiagrammen); Erwartungswert und Varianz einer Zufallsvariablen berechnen;
a),b) als Teil einer mündlichen Matura-Aufgabe, c) als Ausbaumöglichkeit.
c): Baumdiagramme, Risiko eines Spielers nach Breite der Verteilung (gemessen durch die Varianz) beurteilen.

(Vgl. Goldberg, S.188)

FORMEL VON BAYES

3) Eine Untersuchung auf Eignung für den Leistungssport sei durch folgende Aussagen charakterisiert:
Von den ungeeigneten Personen werden 98 % richtig und 2% falsch eingestuft, von den geeigneten werden 95% zugelassen und 5% fälschlicherweise als untauglich hingestellt.
Aus einer großen Gruppe, von der 90% für den Leistungssport geeignet sind, wird eine Person willkürlich herausgegriffen und untersucht. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß diese Person

a) leistungsfähig ist, obwohl sie als ungeeignet gekennzeichnet wird,

b) leistungsunfähig ist, obwohl sie als leistungssportfähig eingestuft wird?

c) Beurteilen Sie die Güte des Verfahrens.

d) F sei ein Ereignis aus dem Stichprobenraum S mit $P(F) \neq 0$. Die Ereignisse E_1, E_2 und E_3 mögen eine Zerlegung von S bilden. Bekannt seien die Wahrscheinlichkeiten $P_{E_i}(F)$ und $P(E_i)$, $i=1,2,3$. Geben Sie die Formeln für die Wahrscheinlichkeiten $P_F(E_i)$, $i=1,2,3$ an und beweisen Sie diese. (Formel von Bayes)

Analog für Krebstest, Daten Heigl-F. S. 248, auch mit aktuellen Daten wie aus dem ominösen Zuckertest in Wien (1981). Text umsetzen, geeignete Bezeichnungen wählen; bedingte Wahrscheinlichkeit; Formel von Bayes oder Baumdiagramm; Interpretation der Ergebnisse; Bewerten eines außermathematischen Sachverhalts mittels mathematischen Modells; eventuell Deutung als subjektive Wahrscheinlichkeit; Beweis. Ganzes Beispiel oder Teil eines schriftlichen Matura-Beispiels, auch für die mündliche Prüfung.

(Althoff, S. 23)

VERTEILUNGEN (BINOMIALVERT., POISSONVERT., NORMALVERT.)

4) Englische Statistiker zählten die VI-Einschläge in London während des letzten Krieges. Sie teilten London in 576 Teilgebiete von je 25 ha ein. Insgesamt gab es 537 Einschläge, im Durchschnitt also 0,9323 Einschläge pro Gebietseinheit. z(k) sei die Anzahl der Gebiete mit k Einschlägen. Das Auszählungsergebnis entnehmen wir folgender Tabelle:

k	0	1	2	3	4	5
z(k)	229	211	93	35	7	1

a) Man berechne die empirische Verteilung.

b) Man berechne die Wahrscheinlichkeiten für Gebiete mit k Einschlägen nach der entsprechenden Poissonverteilung.

c) Man berechne die theoretische Anzahl der Gebiete mit k Einschlägen.

d) Beurteilen Sie die Güte der Übereinstimmung theoretische-empirische Verteilung. Was schließen Sie daraus?

Text vergleichsweise einfach; relative Häufigkeiten berechnen; wissen, daß $\hat{\lambda}=\bar{x}$; entsprechende Poissonwahrscheinlichkeiten $P_\lambda(k)$ berechnen können; zu d): die Voraussetzungen für die Poissonverteilung (Binomialverteilung) kennen: es war kein gezielter Beschuß möglich.

(vgl. Heigl-F., S. 170)

5) Sikinien hat 50 000 000 Wahlberechtigte und nur zwei Parteien: die Grünen und die Blauen. Das ganze Land ist in 500 Wahlkreise mit je 100 000 Wähler eingeteilt. Es herrscht Mehrheitswahlrecht. In jedem Wahlkreis kandidiert ein Grüner und ein Blauer Kandidat. Der Sieger zieht ins Parlament ein und der Verlierer hat das Nachsehen. Die Bevölkerung ist homogen über das Land verteilt.
   a) Bei einer Wahl haben die Grünen 51% der Stimmen auf sich vereinigt. Wie viele Kandidaten haben sie durchgebracht?
   b) Wieso funktioniert die Mehrheitswahl?

W (ein Wahlkreis grün)=p_1 aus $B_{100.000;\,0,51}$; W (alle Wahlkreise grün) aus $B_{500;p_1}$; erwartete Anzahl der grünen Wahlkreise = $E(B_{500;p_1})$; Varianz = Var ($B_{500;p_1}$); b) es gibt Abweichungen von homogener Verteilung der Wähler. Offene Fragestellung, Kriterium erst finden, Binomialverteilung auf zwei verschiedenen Stufen, Normalapproximation, EB_{np}, Var (B_{np}).

(vgl. Engel, S. 132)

6) Die Verwaltung einer Stadt stellt 2000 Straßenlampen auf. Die Lampen haben eine durchschnittliche Brenndauer von 1000 Stunden bei einer Standardabweichung von 200 Stunden. Treffen Sie "geeignete" Annahmen und berechnen Sie:
   a) Wie viele Lampen werden voraussichtlich während der ersten 700 Betriebsstunden ausfallen?
   b) Wie viele Lampen werden innerhalb der Betriebszeit von 900 bis 1300 Stunden ausfallen?
   c) Nach wie viel Betriebsstunden müssen wir mit einem Ausfall von 10% des Lampenbestandes rechnen?
   d) Interpretieren Sie die Ergebnisse.

Normalverteilung, Standardisieren, Fraktile, Tabellenlesen, Interpretation, zu d) etwa: Normalvt. nur Annahme, bei normalem Verlauf - Vandalen nicht eingeplant, Qualität hat sich seit Voruntersuchung nicht geändert, Ausfälle unabhängig voneinander etc.

(vgl. Moroney, S. 129-132)

7) Die Größe von Werkstücken sei normalverteilt N (μ, σ^2), μ, σ^2 seien einstellbar. Die Kosten pro Werkstück seien in Abhängigkeit von μ, σ^2 gegeben durch: $a\mu + b/\sigma$.
Man finde eine kostenoptimale Einstellung der Maschine, wenn mindestens 90% der Werkstücke mindestens die Größe c erreichen sollen.

Auch mit konkreten Zahlen. Normalverteilung, Standardisieren, Fraktile, Tabellenlesen, Extremwertaufgabe mit ungewöhnlicher Nebenbedingung (eventuell Hinweis darauf gegeben). Interessante Verbindung zweier Teilgebiete, ohne Drill als Matura-Aufgabe geeignet?

ERWARTUNGSWERT, VARIANZ

8) Ein Geschäft bietet seinen Kunden für ein von ihm verkauftes Gerät einen Wartungsvertrag an, in dem es sich verpflichtet, die im Lauf eines Jahres an zwei wesentlichen Einzelteilen e_1 und e_2 anfallenden Reparaturen kostenlos auszuführen. Erfahrungsgemäß fallen beide Einzelteile innerhalb eines Jahres mit der Wahrscheinlichkeit 1/10 aus. Es wird angenommen, daß die Ausfälle der Einzelteile unabhängig erfolgen und daß ein repariertes Teil innerhalb des gleichen Jahres nicht noch einmal ausfällt.
Die Reparatur von e_1 kostet dem Geschäft 100 DM, die von e_2 200 DM.

a) Wie hoch muß der Preis für die jährliche Wartung mindestens sein, damit das Geschäft dem Erwartungswert nach daraus keinen Verlust erleidet?

b) Man berechne Varianz und Streuung der jährlich anfallenden Reparaturkosten für das einzelne Gerät.

c) Wie viele Wartungsverträge müssen mindestens laufen, damit das arithmetische Mittel der anfallenden Reparaturkosten mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 90% um höchstens 10 DM vom Erwartungswert der Wartungskosten abweicht? Interpretieren Sie die Ergebnisse im Hinblick auf kleine und große Betriebe.

d) Sei die Ausfallwahrscheinlichkeit p aus einer Stichprobe geschätzt: 95%-Konfidenzintervall $(\frac{1}{11},\frac{1}{9})$. Geben Sie daraus den "schlimmsten" und den besten Fall für den Erwartungswert an. Hätte man einen größeren Stichprobenumfang zur Schätzung von p verwenden sollen?

Text auffassen; Baumdiagramm; Verteilung einer Zufallsvariablen bestimmen; EX, VX; Tschebyscheffsche Ungleichung oder Normalapproximation bei Kenntnis von "X_i unabhängig, $VX_i < \infty \Rightarrow Var(\sum X_i) = \sum Var(X_i)$"; Interpretation des GgZ; d): Übertragung von Konfidenzintervallgrenzen, Bewertung der Genauigkeit von Schätzungen.

(vgl. Heigl-F., S. 147)

STATISTISCHE BEURTEILUNG

9) Ein Kandidat einer Partei läßt in seinem Wahlkreis eine Umfrage durchführen, um zu erfahren, wie viele Stimmen er voraussichtlich erhalten wird. Von 320 Befragten geben 168 an, ihn wählen zu wollen.

a) Wird er die absolute Mehrheit der Stimmen im Wahlkreis erreichen?

b) Aus innerparteilichen Gründen wäre es für ihn wichtig, sein letztes Wahlergebnis - 48,2% der Stimmen zu übertreffen.
Wird er es schaffen?

c) Für eine Direktwahl genügen erfahrungsgemäß 46,5% der Stimmen.
Kann er mit dem Direktmandat rechnen?

Offen insofern, als keine Konfidenzzahlen festgelegt sind; a) KI oder Hypothesentest, "besser" einseitiger Hypothesentest, b) und c) KI.

(Strick, S.73)

10) Mit einem Hand-Dominanz-Test stellt man fest, ob Kinder im Alter zwischen 6 und 10 Jahren eher als linkshändig oder als rechtshändig zu bezeichnen sind. 11% der getesteten Mädchen und 13% der getesteten Jungen sind Linkshänder.

a) Bei einem Einschulungstest im 1. Schuljahr fand man in einer Gruppe von 117 Mädchen und 125 Jungen 18 bzw. 10 Linkshänder.
Sind die Ergebnisse mit den o.a. Prozentsätzen verträglich?

b) Bei einem Test von 305 14jährigen Mädchen erwiesen sich 20 als Linkshänder; bei 312 gleichaltrigen Jungen waren dies 25.
Deutet dies darauf hin, daß Jugendliche ihre Linkshändigkeit verlernen?

c) Die Prozentsätze 11% bzw. 13% wurden aus einer Stichprobe von 677 Mädchen bzw. 629 Jungen gewonnen.
Wie genau kann man aus diesen Stichproben die Anteile der Linkshänder schätzen?
(Sicherheitswahrscheinlichkeit 95,5%)

Text erfassen; erkennen, daß KI zur Beurteilung herangezogen werden sollen; Testen von Hypothesen, KI; Deutung der Ergebnisse durch reale Sachverhalte.

(Strick, S.102)

11) Der Produktionschef einer Firma schlägt in einem Bericht die Einstellung von zusätzlichen Reparatur-Handwerkern vor. Seine Schlußfolgerungen basieren auf der Annahme, daß im Mittel 20% der Maschinen der Firma täglich eine Durchsicht erfordern, d.h. die Wahrscheinlichkeit, daß eine Maschine an einem Tage (Maschinen-Tag) einen Handwerker braucht, beträgt 0,20. Der Direktor der Firma will diese Annahme prüfen, da die Schlußfolgerungen davon abhängen, ob die angenommenen 20% zu hoch oder zu niedrig sind. Es sei angenommen, daß nur 20 Maschinen-Tage beobachtet werden, und daß der Direktor ein höchstens 10%iges Risiko auf sich nehmen will, die Annahme zu verwerfen, wenn sie zutrifft ($\alpha = 0,10$).

a) Formulieren Sie eine Null- und eine Gegenhypothese und erklären Sie die Anwendungsmöglichkeit der Binomialverteilung (d.h. definieren Sie Versuch, Experiment, Niete usw.)

b) Setzen Sie eine vernünftige Entscheidungsvorschrift für das Testen der Nullhypothese fest.

c) An den 20 beobachteten "Maschinentagen" wurden 7 Reparaturarbeiten nötig. Wie groß ist Signifikanz dieses Ereignisses? Ist es ungewöhnlich bei einer 0,10-Signifikanz-Schranke?

d) Zeichnen Sie zu der Gütefunktion der Entscheidungsvorschrift in b) den Graphen und in der gleichen Figur auch den Graphen einer idealen Entscheidungsvorschrift, bei der die Wahrscheinlichkeiten für beide Arten von Fehlern null sind.

Text umsetzen; Begründen des mathematischen Modells; Formulieren der Hypothesen und der Entscheidungsvorschrift; Berechnen der Signifikanz des Ergebnisses.

(Goldberg, S.292)

12) Zwei Schlafmittel "Träum-süß" und "Schlaf-wohl" werden an 10 Testpersonen erprobt. Bei 8 Personen führt "Träum-süß" zu einer längeren Schlafdauer als "Schlaf-wohl" während es bei 2 Personen umgekehrt ist.

Testperson Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Schlafdauer bei "Träum-süß" in Std.	8,0	7,4	5,9	9,4	8,6	8,2	7,6	8,1	6,2	8,9
Schlafdauer bei "Schlaf-wohl" in Std.	6,8	7,1	6,8	8,3	7,9	7,2	7,4	6,8	6,8	8,1
Differenz	+	+	−	+	+	+	+	+	−	+

a) Die Hypothese, daß beide Schlafmittel gleich wirksam sind, ist zu testen. Als Testkriterium ist die Anzahl der Fälle heranzuziehen, in denen "Träum-süß" besser gewirkt hat (Anzahl der Pluszeichen). Wie soll die Unvoreingenommenheit gegenüber den beiden Mitteln ausgedrückt werden? Formulieren Sie entsprechende Hypothesen und führen Sie den Test durch.

b) Wie a), nur soll nun "Schlaf-wohl" ein bewährtes Mittel darstellen, während "Träum-süß" ein neues Präparat ist, das sich erst in der Testphase befindet.

Hypothesentest, einseitig und zweiseitig, Umdeutung von Hypothesen über die Wirksamkeit von Schlafmitteln in solche über eine binomialverteilte Zufallsvariable; Veränderung der Realsituation schlägt sich in der Wahl des Testverfahrens nieder.

(vgl. Heigl-F., S.202f)

13) Mittels einer Zeitstudie soll der durch Störungen bedingte Anteil der Betriebsmittelzeit einer teuren Maschine ermittelt werden. Dieser wird von den Arbeitern auf ca. 10% geschätzt. Im Rahmen der Untersuchungen geht ein Zeitstudienmann zu zufällig gewählten Zeitpunkten durch den Betrieb und stellt fest, ob die Maschine gestört ist.

a) Wie viele Beobachtungen müssen gemacht werden, um zu prüfen, ob der von den Arbeitern angegebene Prozentsatz bei einer Abweichung von 1% mit 95% statistischer Sicherheit gilt (d.h. (0,1-0,01; 0,1+0,01) ist das 95% Toleranz- oder Konfidenzintervall).

b) Bei einer Zwischenauswertung nach 100 Beobachtungen wird eine relative Häufigkeit von 16% für Störungen ermittelt. Welche Aussagen lassen sich über den tatsächlichen Prozentsatz der Störungen machen?

Text umsetzen, Schätzbereiche, Konfidenzintervalle, nötigen Stichprobenumfang bestimmen.

STATISTISCHE QUALITÄTSKONTROLLE (SQK)

14) Ein Obsthändler vereinbart mit dem Lieferanten einer größeren Menge von Haselnüssen, daß er einen bestimmten Preisnachlaß bekommt, wenn "der Anteil p der im Inneren schon vertrockneten Nüsse 10% der gesamten Lieferung übersteigt". Vereinbarungsgemäß soll das der Fall sein, wenn aus der Menge von 100 zufällig der Lieferung entnommenen Nüsse mehr als 10 im Inneren schon vertrocknet sind.

a) Warum kann man für die Anzahl X der vertrockneten Nüsse in der Stichprobe vom Umfang 100 mit einer Binomialverteilung rechnen, obwohl es sich bei der Stichprobe um eine Ziehung ohne Zurücklegen handelt? Interpretieren Sie p als Wahrscheinlichkeit.

b) Wie groß ist das Risiko des Lieferanten, einen Preisnachlaß gewähren zu müssen, obwohl nur 10% der Haselnüsse vertrocknet sind?

c) Wie groß ist das Risiko des Händlers, keinen Preisnachlaß zu erhalten, obwohl 15% der Nüsse vertrocknet sind?

d) Was für ein Entscheidungsverfahren (statt des vereinbarten) müßte bei gleichem Stichprobenumfang 100 genommen werden, damit der Händler mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 5% zu Unrecht einen Preisnachlaß erhält?

e) Für die Nullhypothese $H_o: p \leq 0{,}1$ werde als Entscheidungsregel genommen: Verwirf $H_o \Leftrightarrow X > 15$. Zeichnen Sie dafür den Graphen der Gütefunktion

$$g: [0;1] \rightarrow [0;1] \text{ mit } g(p) = \sum_{i=16}^{100} b(100;p;i).$$

f) Erläutern Sie daran, bezogen auf das obige Beispiel mit den Haselnüssen, die inhaltliche Bedeutung der Funktionswerte g(p).

g) Was bedeutet bei dem Beispiel die Sprechweise "Die Nullhypothese $H_o: p \leq 0{,}1$ soll auf einem Signifikanzniveau von 5% getestet werden"?

Text erfassen, Hypothesentesten, Fehler 1. und 2. Art, Gütefunktion, Interpretation der Ergebnisse.

(Althoff, S.24)

15) a) Man zeichne die OC-Kurven für die beiden Stichprobenpläne N=500 n=50 d=0 bzw. d=1 und diskutiere das daran anknüpfende Entscheidungsverhalten.

b) Der Produzent halte normalerweise 1% Schlechtanteil ein (Gutgrenze), vertraglich sei vereinbart, daß 10% nicht überschritten werden sollen (Schlechtgrenze). Berechnen Sie Konsumentenrisiko und Produzentenrisiko zu den Prüfplänen in a). Stellen Sie die Verteilung der Schlechtstücke graphisch dar, wenn tatsächlich p=0,01 bzw. p=0,10 ist, und schraffieren Sie Produzenten- und Konsumentenrisiko.

c) Jede abgelehnte Sendung unter a) wird zu 100% kontrolliert. Die zu erwartende Prüfdichte ist in Abhängigkeit des tatsächlichen Ausschußprozentsatzes graphisch darzustellen (p=0,01, 0,02, 0,03, 0,05, 0,1).

Bemerkungen: N Umfang der Grundgesamtheit, n Umfang der Stichprobe, d Annahmezahl, d=1 bedeute: eine Sendung wird nur dann angenommen, wenn die Anzahl der schlechten Stücke in der Stichprobe kleiner gleich 1 ist; die OC-Kurve gibt an, wie groß die Wahrscheinlichkeit der Ablehnung einer Sendung in Abhängigkeit vom tatsächlichen Ausschußprozentsatz ist (Gütefunktion).

Es ist vernünftig, das Beispiel mit Poissonapproximation rechnen zu lassen. Der große Vorteil einer SQK-Einkleidung ist, daß Fehler 1. und 2. Art eine "natürliche" Interpretation haben.

Text erfassen: Poissonapproximation; Fehler 1. und 2. Art, Gütefunktion, Bewerten der Ergebnisse, Vertrautsein mit Jargon und Begriffen der SQK.

(vgl. nach Moroney, S. 155 f; weitere Beispiele zur SQK: Ineichen S. 42-44, ab S. 83, Heigl-F., S. 201 u.a.).

) Berechnen Sie

a) die (bedingte) Wahrscheinlichkeit, daß eine 30-jährige Frau, ein 35-jähriger Mann, die nächsten 40 Jahre überleben,

b) die Wahrscheinlichkeit, daß der Mann noch lebt, die Frau nicht mehr lebt, und umgekehrt, sowie, daß beide nach 40 Jahren noch leben.

c) Welche Voraussetzungen mußten Sie in b) treffen? Diskutieren Sie die "Zulässigkeit" dieser Voraussetzungen.

d) Berechnen Sie näherungsweise die mittlere Lebenserwartung eines 71-jährigen Mannes.

e) $p_x: l_{x+1}/l_x$ $x=0,1,..w$ (höchstes Alter in der Sterbetafel); $q_x:=1-p_x$; ${}_np_x:=p_x \cdot p_{x+1} \cdots p_{x+n-1}$. Interpretieren Sie p_x, q_x, ${}_np_x$!

f) Die Zufallsvariable Z "Jahre, die eine bestimmte Person im Alter x noch zu leben hat" nehme (der Einfachheit halber) die Werte 0,5, 1,5, .. an.
Zeigen Sie: Für die mittlere Lebenserwartung E(Z) gilt:

$$E(Z) = \frac{l_x + l_{x+1} + \ldots + l_w}{l_x} - 0{,}5 \quad \text{w wie in e)}$$

Alter x	Überlebende l_x männlich	weiblich
0	100.000	100.000
5	96.654	97.429
10	96.377	97.261
15	96.114	97.109
20	95.353	96.820
21	95.145	96.772
22	94.939	96.714
23	94.734	96.656
24	94.536	96.598
25	94.348	96.540
30	93.479	96.234
35	92.485	95.830
40	91.066	95.196
45	89.099	94.203
50	86.346	92.638
55	82.180	90.319
60	76.014	86.969
65	66.625	81.641
70	53.491	73.047
75	37.658	59.742
80	22.104	41.735
85	9.867	22.110
90	2.975	7.869

g) Eine Versicherungsgesellschaft schließt mit einem 20-jährigen einen Vertrag ab über 100 000, Laufzeit 5 Jahre. Welchen Betrag an jährlichen Prämien soll sie vorschreiben? Diskutieren Sie Ihr Ergebnis.

Text, teilweise mit Formeln, erfassen; Unabhängigkeit; (bedingter) Erwartungswert, Bedeutung des Erwartungswerts; Tabellenlesen; Beweis; Anwendung im Versicherungswesen; g): offene Problemstellung.

(Teilweise aus Ineichen S.114f, S.76; Goldberg, S.91; ähnliches Beispiel in Strick, S.103)

GENETIK

17) a) In einer Ausgangspopulation seien nur Individuen vom Genotyp AA und vom Genotyp BB im Verhältnis 75:25 vorhanden.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit treten bei zufälliger Partnerwahl Ehen vom Typ AA x AA, AA x BB bzw. BB x BB auf (Ausgangsgeneration)?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit treten bei den Kindern die Genotypen AA, AB bzw. BB auf (1. Generation)?

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit treten in dieser 1. Generation Ehen vom Typ AA x AA, AA x AB, AA x BB, AB x AB, AB x BB bzw. BB x BB auf?
Mit welcher Wahrscheinlichkeit treten bei deren Kindern (2. Generation) die Genotypen AA, AB bzw. BB auf?

d) Was folgt für die weiteren Generationen?

e) Mit welchen Anteilen sind die Allele A bzw. B in den verschiedenen Generationen vertreten?

Baumdiagramme, Unabhängigkeit; Erkennen eines Systems; Kenntnis der genetischen Sachverhalte und Bezeichnungen.
Bemerkungen: Träger der Erbanalgen (Gene) sind die Chromosomen in den Zellkernen. Verschiedene Zustände eines Gens .. Allele (A, B,..). Zellkerne erhalten einen doppelten Chromosomensatz, der Genotyp einer Zelle entsteht durch zufällige Kombination je einer Hälfte des väterlichen und mütterlichen Chromosomensatzes. Punkt e) der Aufgabe ist Inhalt des sogenannten Hardy-Weinberg-Gesetzes.

(Strick, S.84)

18) Wir betrachten die Blutgruppen O, A, B und AB beim Menschen. Diese Blutgruppe wird bewirkt durch das Vorhandensein von genau zwei von drei allelen Genen, die wir ebenfalls mit O, A, B bezeichnen wollen. Somit sind sechs Genotypen möglich: OO, AA, BB, AO, BO und AB.
Nun ist das Gen O rezessiv, die Gene A und B dominant. Deshalb entsprechen den sechs Genotypen nur vier Phänotypen, eben die vier Blutgruppen O (wenn OO vorhanden), A (wenn AA oder AO vorhanden), B (wenn BB oder BO) und AB (wenn AB).

Wir nehmen an, das Gen O trete in einer Bevölkerung mit der Wahrscheinlichkeit r auf, Gen A mit p, Gen B mit q; $p+q+r = 1$.

Population	Umfang der Stichprobe	rel. Häufigkeit in %			
		O	A	B	AB
austral. Ureinwohner	54	42,6	57,4	0	0
Chinesen	1000	30,7	25,1	34,2	10,0
Deutsche	39174	36,5	42,5	14,5	6,5
Eskimos	146	55,5	43,8	0	0,7
Engländer	422	47,9	42,4	8,3	1,4
Indianer	100	91	7	2	0
Italiener	540	45,9	33,4	17,3	3,4
Melanesier	500	37,6	44,4	13,2	4,8
Polynesier	413	36,5	60,8	2,2	0,5
Russen	489	31,9	34,4	24,9	8,8

a) Welche Wahrscheinlichkeiten ergeben sich dann für jeden der vier Phänotypen? Wir setzen dabei voraus, daß Paarungen im Hinblick auf die Blutgruppe reine Zufallspaarungen sind (für Blutgruppe A ergibt sich p^2+2pr).

b) Bestimmen Sie 95,5%-Konfidenzintervalle für die Anteile, mit denen die Blutgruppen O, A, B, AB in verschiedenen Populationen auftreten!

c) Schätzen Sie den Anteil der Personen mit Genotyp AA bzw. AO in der Bevölkerungsgruppe der australischen Ureinwohner.
Hinweis: Nur Genotyp OO ergibt Blutgruppe O und Ergebnis von a).

d) Schätzen Sie die Anteile der Allele A, B und O nach dem Hardy-Weinberg-Gesetz!

Text erfassen; Bezeichnungen und Annahmen der Genetik kennen; a) Umsetzen des Anwendungstextes in ein Problem der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Baumdiagramme; b) KI; c) und d) Erfassen wichtiger Beziehungen, Gleichungen aufstellen, lösen.

(Vgl. Ineichen, S.77 bzw. Strick, S.90)

DEMOSKOPIE

Siehe etwa Strick, S.82f

ZUVERLÄSSIGKEITSTHEORIE

Siehe etwa Heigl-F., S.249, Engel, S.91.

Weitere Beispiele, die zur Matura geeignet sind, befinden sich etwa in Bürger-Fischer-Malle Mathematik Oberstufe, Band 4, 4450 - 4473, Seite 295-301.

LITERATUR FÜR BEISPIELE AUS DER STOCHASTIK:

Althoff, H.: Vorschläge für Abituraufgaben aus der Stochastik. In: Stochastik im Schulunterricht, Hölder-Pichler-Tempsky, Wien, 1981.

Drei nach verschiedenen Schwierigkeitsgraden abgestimmte, in viele Teilaufgaben gegliederte Matura-Beispiele mit Lösung.

Arnold, H.; Kirschenhofer, W.: Aufgabensammlung zur Wahrscheinlichkeitsrechnung mit didaktischen Beiträgen I u. II, Hefte 9 und 10 des Instituts f. Math., Universität Linz, 1978 u. 1979.

Teil 1: Wahrscheinlichkeitsrechnung, 120 vollständig gelöste Beispiele mit Kommentar; u.a. zur Formel von Bayes (Krebs-Test)), ein Beispiel zur Genetik (Vererbung der Blutkrankheit Hämophilie, sehr interessant, Kommentar leider zu kurz), viele Aufgaben zur Kombinatorik; Teil 2: Verteilungen, beurteilende Statistik, auf Matura-Beispiele wird explizit eingegangen.

Bangen, G.: Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik, Diesterweg Salle, Frankfurt, 1974.

Diskrete - stetige Verteilungen, auch mehrdimensionale, Korrelationskoeffizient; viel zum Hintergrund, etwa: Stellung der Glücksspiele in Wahrscheinlichkeitsrechnung, Anwendungen in Physik, Deutung von Wahrscheinlichkeit; vom Standpunkt des Anwenders in der Physik geschrieben.

Barth, F.; Bergold, H; Haller, R.: Stochastik 1 u. 2, Ehrenwirt, München, 1980.

Teil 1: Wahrscheinlichkeitsrechung bis Gesetz der großen Zahlen; Teil 2: Zufallsgrößen, Binomial-, Poisson-, Normalverteilung, Testen von Hypothesen, Parameterschätzung, Konfidenzbereiche; umfangreiches, vielfältiges Angebot an Übungsaufgaben, historische Notizen, geht auch auf Hintergrund, Deutung von Wahrscheinlichkeit etc. ein; auch als Nachschlagwerk geeignet.

Bosch, K; Wolff, H.: Wahrscheinlichkeitrechnung und Statistik, Grundkurs, Leistungskurs, Westermann, Braunschweig, 1980.

Beschreibende Statistik, Wahrscheinlichkeit, Zufallsvariable, beurteilende Statistik; Text mathematisch orientiert, geht von Axiomen aus, viele Übungsaufgaben aus verschiedensten Gebieten; Grundkurs: stärkere Betonung von Laplace-Wahrscheinlichkeiten; Lehrbuch.

Brenner, J.; Lesky, P; Vogel, A.: Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, Didaktische Materialien für Grund- und Leistungskurse, Klett, Stuttgart, 1980.

Beschreibende Statistik, von Verteilungen nur Binomial-, Normalverteilung, dafür beurteilende Statistik, viele (75) durchgerechnete Beispiele; als Material zur Lehrerfortbildung konzipiert.

Engel, A.: Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, 1 u. 2, Klett, Stuttgart, 1973.

Teil 1: Kombinatorik, statistische Anwendungen, Simulation, Verteilungen (auch hypergeometrische), χ^2-Test; viele, originell gestaltete Aufgabenstellungen (mit Lösung); pragmatisch, wenig zum Hintergrund; Teil 2: Markow-Ketten, Spieltheorie u.a.; Darstellung elementar.

Goldberg, S.: Die Wahrscheinlichkeit - Eine Einführung in Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, Vieweg, Braunschweig, 1973.

Axiomatische Darstellung, nur endliche Wahrscheinlichkeitsräume, viele, interessante Beispiele, viele Aufgaben (zur Hälfte mit Lösung), Nachschlagwerk.

Heigl, F; Feuerpfeil, J.: Stochastik, Grundkurs, Leistungskurs, Bayerischer Schulbuchverlag, München, 1976.

Strukturmathematisch orientiert, der mathematische Aspekt der Stochastik kommt durch die sehr klare Gliederung des Texts gut heraus, beim Testen von Hypothesen ist diese Variante von Stochastik eventuell hinderlich, die Grenzen der Verfahren zu erkennen; Lehrbuch, Nachschlagwerk.

Ineichen, R.: Einführung in die elementare Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung, Raeber, Luzern-Stuttgart, 1977.

Berücksichtigt beurteilende Statistik, vielfältige Anwendungen (Medizin, Genetik, SQK), viele Beispiele, Aufgaben (mit knapper Lösung), Darstellung elementar.

Ineichen, R.: Elementare Beispiele zum Testen statistischer Hypothesen, Orell Füssli, Zürich, 1978.

Konfidenzintervalle, Tests für Mittelwerte, auch für zwei Mittelwerte, Tests für Varianzen, χ^2-Test, SQK; zu jedem Testverfahren wird ein Beispiel gemacht und der theoretische Hintergrund erläutert; dabei interessante Anwendungen.

Moroney, M.J.: Einführung in die Statistik, Oldenbourg, München-Wien, 1970.

Nicht im Stil eines Lehrbuchs, soll den Umgang mit statistischen Aussagen erleichtern; Teil 1: Viele "reale" Beispiele, teilweise zum Abbau von Fehlvorstellungen, Hintergrund der Anwendung statistischer Methoden (z.T. in Anekdoten); beschreibende Statistik, Binomial-, Poisson-, Normalverteilung, statistische Qualitätskontrolle, beurteilende Statistik; Teil 2: spezielle statistische Methoden (Zeitreihen u.a.); wenig Übungsaufgaben mit knapper Lösung.

Strick, H.K.: Einführung in die beurteilende Statistik, Schrödel, Hannover, 1980.

Direkter Zugang zur beurteilenden Statistik unter starker Reduktion wahrscheinlichkeitstheoretischer (innermathematischer) Zusammenhänge, im Zentrum stehen Binomialverteilungen, empirisch wird erarbeitet: 95% der Verteilung liegt ungefähr im 2-σ-Streifen um den Erwartungswert. Damit erhält man Prognose-Intervalle, in der Umkehr Konfidenzintervalle bzw. Entscheidungsregeln für Parameter-Tests. Anwendungskontext vielfältig, realitätsnahe: Demoskopie, Statistische Qualitätskontrolle, Genetik, Zuverlässigkeitstheorie, Versicherungsmathematik u.a.; einige Beispiele haben den Charakter der Förderung der Emanzipation im politischen Leben. Lösungsheft mit ausführlichem Kommentar.